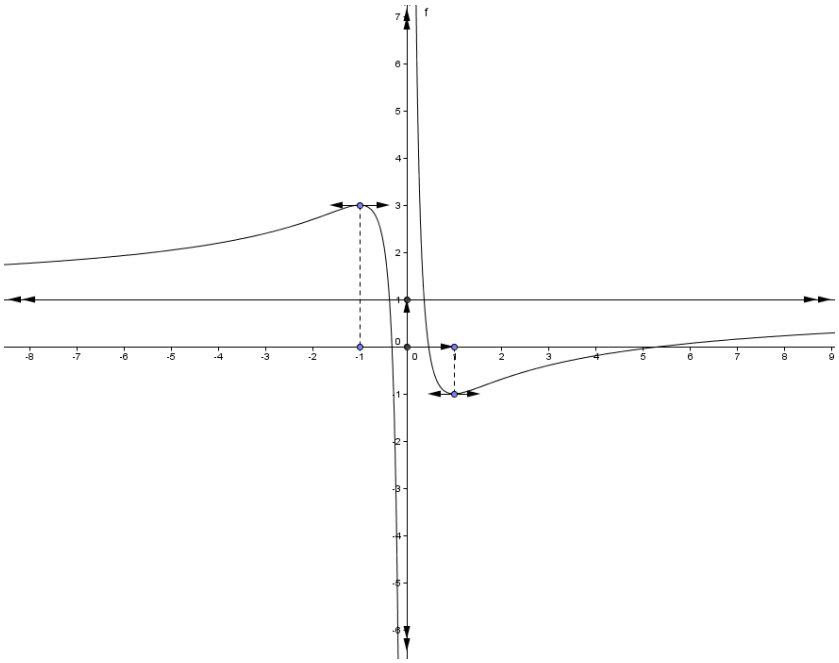
EXERCICE N°4 : 25' 5 points

La courbe ζ_f ci – jointe représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$. Les droites d'équations x = 0 et y = 1 étant des asymptotes à cette courbe.



1) En utilisant le graphique déterminer :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

b) Le tableau de variation de f.

2) On suppose que l'expression de f(x) est de la forme : $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c \ln|x|}{x}$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = -\frac{b}{x^2} + c\left(\frac{1 - \ln|x|}{x^2}\right).$$

b) Montrer, en utilisant le graphique que les réels a, b et c vérifient le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -1 \\ -b + c = 0 \end{cases}.$$

c) En déduire alors l'expression de f(x).

EXERCICE N°5 : 35' 6 points

Soit $\alpha \in]1, +\infty[$, on considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = u_n^{2^n}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$. En déduire que $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\alpha - 1)$.

d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 2^n (u_n - 1)$.

a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{(1-u_n)^2}{2} \leq \ln(u_n) - u_n + 1 \leq 0$ puis que :

$$-2^{n-1}(1-u_n)^2 \leq \ln(\alpha) + 2^n(1-u_n) \leq 0.$$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{2^{n+1}}(\alpha - 1)^2 \leq \ln(\alpha) - v_n \leq 0$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn